Primitivation de fonctions périodiques

On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel formé des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

On introduit les sous-ensembles de E suivants :

E_0 formé des fonctions f telles que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$,

C formé des fonctions constantes,

P formé des fonctions 2π périodiques,

P_0 formé des fonctions f telles que $f \in P$ et $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$

1.a Montrer que E_0 et C sont des sous-espaces vectoriels.

1.b Montrer que E_0 et C sont supplémentaires dans E.

1.c Montrer que P est un sous-espace vectoriel E

1.d Etablir, par un *argument rapide*, que P_0 est aussi un sous-espace vectoriel de E.

2.a Soit $f \in E$ donnée.

Montrer que f possède une et une seule primitive $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{2\pi} F(t)dt = 0$.

Nous noterons désormais $L(f)$ cette primitive.

2.b L'application $L:E \to E$ est-elle injective, surjective, bijective ?

3. Soit $f \in P$.

3.a Observer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$.

3.b Montrer que f possède une primitive 2π périodique ssi $f \in P_0$

3.c Observer que, si tel est le cas, $L(f) \in P_0$.

On note $\mathcal{L}:P_0 \to P_0$ la restriction de L à P_0,

puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{L}^n = \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \ldots \circ \mathcal{L}$ (produit à n termes)

La suite de l'étude a pour objectif d'exprimer $\mathcal{L}^n(f)$ pour tout $f \in P_0$, à l'aide d'une seule intégrale.

4. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, des fonctions polynomiales $B_n:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ de la manière suivante :
on pose $B_0:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale constante égale à 1,
puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_{n+1} = L(B_n)$.

4.a Expliciter $B_n(t)$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

4.b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(2\pi)$.

5. Pour tout $f \in P_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\varphi_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(f)(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t) f(x+t)dt$.

5.a Montrer que $\varphi_n(f)$ est une fonction 2π périodique.

5.b Montrer $\varphi_1(f) = \mathcal{L}(f)$.

5.c Etablir que pour tout $n \geq 1$: $\varphi_{n+1}(f) = \varphi_n(\mathcal{L}(f))$.

5.d En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\varphi_n(f) = \mathcal{L}^n(f)$.